نظرية ألاحتمالات Elementary Probability Theorem

تلعب نظرية الاحتمالات دورا كبيرا في نظريات وتطبيقات علم ألاحصاء والتي تعني بدراسة التجارب العشوائية كتجربة رمي زهرة النرد و قطعة نقود وغيرها.

تعاريف:

ألتجربة ألعشوائية The Random Experiment: هي التجربة التي لا يمكن معرفة نتيجتها مسبقا لخضوعها لقوانين ألاحتمال، كتجربة رمي زهرد النرد او رمي قطعة نقود.

فضاء او فراغ العينة Sample Space :هو جميع النتائج ألممكنة للتجربة العشوائية وكل نتيجة تمثل عنصر في فضاء العينة ويرمز له بالرمز ب S او Ω.

فمثلا عند رمي قطعة نقود مرة واحدة فان فضاء العينة يكون:

$S = \{ \mathbf{H,T} \}$

أما عند رمي قطعتي نقود فان فضاء العينة يكون

$S = \{ \mathbf{HH, HT, TH, TT} \}$

أما عند رمي زهرة نرد فان فضاء العينة هو

$S = \{ \mathbf{1,2,3,4,5,6} \}$

الحدث Event هو نقطة أو عدة نقاط في فضاء العينة ويرمز له بالرمز E_i

الحدث قد يكون بسيطا (حالة واحدة من الحالات التي تظهر من نتائج التجربة) او مركبا أذا شمل حالتين أو أكثرمن الحالات التي تظهر نتيجة التجربة.

فمثلا الحصورة على صورة واحدة عند رمي قطعة نقود يسمى حدث بسيطا بينما الحصول على عدد زوجي يسمى حدثا مركبا..

$E_1 = \{ \mathbf{H} \}$ **Simple Event حدث بسيط**

$E_2 = \{ \mathbf{2,4,6} \}$ **Compound Event حدث مركب**

Dr.Hayder Abbas Drebee

ألاحداث المتنافية Mutually Events

يقال ان الحدثين E_1, E_2 انهما متنافيان أذا استحال حدوثهما معا.

فمثلا عند رمي قطعة نقود فمن ألمستحيل ألحصول على صورة وكتابة في نفس الوقت او من المستحيل الحصول على الرقم واحد واثنين في ان واحد.

ألاحداث المستقلة Independent Events

هي الاحداث التي لا تؤثر ولا تتاثر ببعضها البعض، أي ان وقوع احدها لا يؤثر و لايتاثر بوقوع ألاحداث الاخرى.

فمثلا عند رمي قطعتي نقود فالحصول على صورة في القطعة ألاولى لا يؤثر ولا يتاثر في نتيجة القطعة الثانية.

ألاحداث ألغير المستقلة Non Independent Events

هي الاحداث التي تؤثر وتتاثر ببعضها البعض فمثلا في حالة صندوق يحتوي على كرات حمراء وسوداء فعند سحب كرتين على التوالي وبدون اعادة فان نتيجة سحب الكرة ألثانية تتاثر بنتيجة سحب الكرة الاولى لذا فان الحثين غير مستقلين.

الحالات ألممكنة Possible Case

هي جميع الحالات ألمختلفة ألتي يمكن ان تظهر في تجربة معينة. فعند رمي قطعة نقود فان عدد الحالات الممكنة يكون حالتين (صورة او كتابة) اما عند رمي زهرة نرد فان عدد الحالات الممكنة هي 6 .

الحالات المواتية Favorable Case

هي ألحالات التي تحقق ظهور الحدث المراد دراستة وتسمى ايضا حالات النجاح فمثلا اذا كان الحدث عند رمي زهرة نرد هو الحصول على عدد زوجي فالحالات التي تحقق هذا الحدث هي الحصول على 2 و 4 و6 فهذ احالات الثلاثة تسمى حالات النجاح او المواتية.

الحالات المتماثلة Equally Likely Case

هي الحالات المتكافئة والمتساوية في امكانية حدوثها فمثلا الظروف المهيئة للحصول على صورة أو كتابة عند رمي قطعة نقود تكون متكافئة لذلك يقال بان تلك حالتين هي حالتان متماثلتان.

مضروب n Factorial n!

يرمز لة بالرمز $n!$ ويعرف كمياتي:

n! = n (n-1) (n-2) (n-3)……..1

n! = n (n-1) (n-2)!

n! = n (n-1) (n-2) (n-3)!

5! = 5(4) (3) (2) (1)

5! = 5(4)!

Dr.Hayder Abbas Drebee

$5! = 5(4)\ (3)!$

$0! = 1$

$\frac{n!}{n} = (n-1)!$

ألتباديل Permutation

أو P_r^n يقصد بالتباديل بانها عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشياء اما باخذها كلها او بعضها ويرمز لها باحد الرموز ألتالية : $n\Pr$

وقانونه هو

$$n\Pr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

عندما $r = n$ فان $nPn = n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ldots\ldots 1 = n!$

ملاحظة:

اذا كانت هناك مجموعةn شئ بحيث تكون مقسمة ألى $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k$ بحيث $n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k = n$ فان

$$nPn_1, \ldots\ldots, n_2 = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots\ldots\ldots n_k!}$$

فمثلا عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من احرف كلمةStatistics هي:

عدد الاحرف الكلية =10

تكرار الحرف s ثلاث مرات

تكرار الحرف t ثلاث مرات

تكرار الحرف a مرة واحدة

تكرار الحرفi مرتان

تكرار الحرف c مرة واحدة

وبالتالي :

$$nPn_1, \ldots\ldots, n_2 = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots\ldots\ldots n_k!} = \frac{10!}{3!3!1!2!1!} = 50400$$

Dr.Hayder Abbas Drebee

التوافيق Combination

يقصد بالتوافيق بانها عدد طرق الاختيار الغير مرتب والتي يمكن تكوينها من عدة أشياء أما باخذها كلها او بعضها ويرمز لها بالرمز $\binom{n}{r}$ وقانونها هو:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n\ (n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!} = \frac{n\Pr}{r!}$$

أي ان الترتيب في حالة التوافيق غير مهم.

ومن السهل اثبات ان $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

مثال: ماعدد طرق ألاختيار التي يمكن تكوينها لاختيار لجنة مكونه 20 شخص من مجموع 100 شخص؟

$$\binom{n}{r} = \binom{100}{20}$$

ملاحظة:

هناك قاعدتان أساسيتان يعتمد عليهما كل من التباديل والتوافيق وهما:

أذا كان عدد الطرق ألممكنة لوقوع الحدث E_1 هو n_1 وان عدد ألطرق الممكنة لوقوع الحدث E_2 هو n_2

وكان E_1 و E_2 حدثان متنافيان فان عدد الطرق الممكنة لوقع الحدثين :

1) E_1 أو E_2 هو $n_1 + n_2$ من الطرق.

1) E_1 و E_2 هو $n_1.n_2$ من ألطرق.

مثال:

حقل دواجن يحتوي 10 دجاج ميزو و 12 دجاجة ليكهورن فبكم طريقة يمكن اختيار 6 دجاجة بحيث تكون منها 4 من دجاج الميزو؟

عدد طرق الاختيار هي:

$$\binom{10}{4}\binom{12}{2}$$

Dr.Hayder Abbas Drebee

معاملات ذات الحدين Binomial Coefficients

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n} y^n$$

Dr.Hayder Abbas Drebee