مفهوم ألاحتمال The Concept of Probability

التعريف الكلاسيكي للاحتمال:

أذا كان الحدث E_i يحدث في n من الحالات (الحالات المواتية) من N من الحالات ألممكنة فان درجة أحتمال حدوث الحدث E_i والتي يرمز له بالرمز $P(E_i)$ هو (بافتراض ان جميع الحالات ألممكنة متساوية الحدوث):

$$P(E_i)=\frac{n}{N}$$

اذا كان $P(E_i)$ تعني احتمال حدوث الحدث (E_i) فأن احتمال عدم حدوثة يرمز له بالرمز $P(E_i)'$

$$P(E_i)'=1-P(E)$$

ويسمى $P(E_i)'$ باحتمال حدوث الحدث المكمل.

ألتعريف التجريبي للاحتمال:

أذا أعيدت تجربة ما n من المرات فان $P(E_i)$ **هو:**

$P(E_i)$=عدد ظهور الحدث/عدد مرات أجراء التجربة

خواص الاحتمال:

الخاصية ألاولى : $P(E_i)+P(E)' =1$

مثال (1):

صندوق يحتوي على 10 كرة حمراء و 8 كرة سوداء و 20 كرة صفراء، اختيرت كرة عشوائيا ماهو احتمال أن تكون هذه الكرة :

سوداء
غير سوداء

الحل

$$P(B)=\frac{8}{38}$$

$$P(B')=\frac{30}{38}$$

$$\therefore \mathrm{P(B)+P(B')=1}$$

الخاصية الثانية:

$$0\le P(E_i)\le 1$$

أي ان الاحتمال يكون بين الصفر والواحد الصحيح.

فاذا كان $P(E_i)=1$ سمي الحدث E_i بانة اكيد اما أذا كان $P(E_i)=0$ سمي الحدث بانة مستحيل.

مثال(2): حقل دواجن يحتوي على 100 دجاجة ميزو، اختيرت دجاجة عشوائيا ماهو أحتمال ان تكون

1. دجاجة ميزو
2. دجاجة ليكهورن

الحل :

$$P(M)=\frac{100}{100}=1$$
$$P(L)=\frac{0}{100}=0$$

الخاصية الثالثة:

أذا كانت $E_1, E_2, ..., E_n$ عناصر فضاء العينة فان:

$$\sum P(E_i)=1,$$

$$P(E_1)+P(E_2)+........+P(E_n)=1$$

مثال (3): اوجد احتمال ان تكرة المسحوبه حمراء، سوداء و صفراء للمثال الاول:

$$P(R)=\frac{10}{38},\quad \mathrm{P(B)}=\frac{8}{38}, \mathrm{P(y)}=\frac{20}{38}$$

$$P(R)+P(B)+P(Y)=1$$

ملاحظة:

أذا كان E_1 و E_2 حدثين، فالتعابير التالية يقصد بها مايلي:

$P(E_1+E_2) \longrightarrow$ احتمال وقوع $\mathrm{E_1}$ OR $\mathrm{E_2}$ أو أحتمال وقوع أيا منهما.

$P(E_1.E_2) \longrightarrow$ احتمال وقوع $\mathrm{E_1}$ and $\mathrm{E_2}$ أو أحتمال حدوثهما معا.

$P(E_1/E_2) \longrightarrow$ احتمال حدوث E_1. علما بان E_2. قد حدث ويسمى بالاحتمال الشرطي Conditional Probability

قوانين الاحتمال Laws of Probability

اولا: قانون ألجمع Addition Law

1. أذا كانت ألاحداث متنافية. أذا كان E_1 و E_2 حدثين متنافيين فان $P(E_1+E_2)$ هو

$$P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)$$

وبشكل عام، أذا كانت $E_1, E_2, E_3, ..., E_n$ أحداثا متنافية

$$P(E_1+E_2+.........+E_n)=P(E_1)+P(E_2)+...........................+P(E_n)$$

مثال: صندوق يحتوي على 10 كرات حمراء و 12 سوداء و 8 صفراء، سحبت كرة عشوائيا من الصندوق ، ماهو احتمال ان تكون ألكرة ألمسحوبة من ألصندوق حمراء او سوداء؟

ألحل:

$$P(R+B)=P(R)+P(B)$$
$$=\frac{10}{30}+\frac{12}{30}$$
$$=\frac{22}{30}$$

2. أذا كانت ألاحداث غير متنافية.

. أذا كان E_1 و E_2 حدثين غير متنافيين فان $P(E_1+E_2)$ هو:

$$P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1E_2)$$

وبشكل عام، أذا كانت $E_1, E_2, E_3, ..., E_n$ أحداثا متنافية

$$P(E_1+E_2+....+E_n)=P(E_1)+P(E_2)+.........+P(E_n)-P(E_1E_2)-P(E_1E_3)+P(E_1E_2E_3)+...$$

بحيث تكون ألاشارة **+** للحالات الفردية و الاشارة **–** للحالات الزوجية.

مثال:- صيادان صوبا بندقيتهما في ان واحد على هدف ما، فاذا كان احتمال أن يصيب الصياد الاول الهدف باحتمال 0.25 واحتمال ان يصيب الصياد الثاني الهدف هو 0.4 ، فما هو احتمال ان يصيب أيا منهما الهدف؟

ألحل:

ليكن حدث أصابة الصياد الاول للهدف E_1

ليكن حدث أصابة الصياد الثاني للهدف E_2

فان:

$$P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1E_2)$$

$P(E_1) = 0.25, \quad \mathrm{P(E_2)} = 0.4$

$$
\begin{aligned}
P(E_1E_2) &= P(E_1).P(E_2) \\
&= 0.25\ (0.4) \\
&= 0.1
\end{aligned}
$$

لان الحدثين مستقلين

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad P(E_1 + E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1E_2) \\
&= 0.25 + 0.4 - 0.1 \\
&= 0.55
\end{aligned}
$$

ثانيا: قانون ألضرب Multiplication Law

1. أذا كانت الاحداث مستقلة : .1

أذا كان E_1 و E_2 حدثين مستقلين فان $P(E_1 + E_2)$ هو

$$P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

وبشكل عام، اذا كانت $E_1, E_2, E_3, ..., E_n$ أحداثا مستقلة فان:

$$P(E_1E_2 ....E_n) = P(E_1)P(E_2)..........................P(E_n)$$

مثال: صيادان صوبا بندقيتهما نحو هدف معين فاذا كان احتمال ان يصيب كل منهم ألهدف هو 0.25 و 0.4 على التوالي، فما هو احتمال ان يصيب الصيادين الهدف معا؟ وماهو احتمال ان لايصيبا الهدف؟

الحل: نرمز لاحتمال ان يصيب الصياد ألاول الهدف بالرمز $P(E_1)$ والرمز $P(E_2)$ يشير ألى احتمال ان يصيب الصياد الثاني الهدف.

$$
\begin{aligned}
P(E_1E_2) &= P(E_1)P(E_2) \\
&= 0.25\ (0.4) \\
&= 0.1
\end{aligned}
$$

$$P(E_1') = 1 - 0.25 = 0.75$$
$$P(E_2') = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$
\begin{aligned}
P(E_1'\ E_2') &= P(E_1')P(E_2') \\
&= 0.75\,(0.6) \\
&= 0.45
\end{aligned}
$$

2) أذا كانت الاحداث غير مستقلة

أذا كان E_1 و E_2 حدثين غيرمستقلين فان $P(E_1 + E_2)$ هو

$$P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2 / E_1)$$

وبشكل عام، اذا كانت $E_1, E_2, E_3, ..., E_n$ أحداثا غيرمستقلة فان:

$$P(E_1E_2.........E_n) = P(E_1)P(E_2/E_1)P(E_3/E_1E_2)..........................P(E_n/E_1E_2E_3.......E_{n-1})$$

مثال:

حقل للدواجن يحتوي 100 دجاجة ميزو و 250 دجاجة لكهورن، اختيرت دجاجتين على التوالي بدون ارجاع الدجاجة ألاولى فما هو احتمال ان تكون الدجاجتين من سلالة ألميزو؟

الحل : نرمز لاحتمال أختيار دجاجة ميزو بالمرة الاولى بالرمز $P(E_1)$ والرمز $P(E_2)$ يشير ألى احتمال اختيار دجاجة ميزو بالمرة الثانية.

$$P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2/E_1)$$

$$= \frac{100}{350}\frac{99}{349}$$

ألاحتمال الشرطي Conditional Probability

أذا كان E_1 و E_2 حدثين في فضاء ألعينة فان $P(E_1/E_2)$ هو

$$P(E_1/E_2) = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_2)}, \qquad \mathrm{P(E_2)} \geq 0$$